*Állison Pinto Batista*

# *A derivada sob o contexto analítico*

*Notas de aprofundamento e de esclarecimento para estudantes de Cálculo*

## Algumas informações antes de começarmos. . .

*Este material é prioritariamente destinado a quem já tem algum contato com as noções de limite e derivada de uma função real. Neste material, trataremos de detalhes mais voltados à sede teórica do assunto, contendo as demonstrações ora omitidas em sala de aula para um melhor entendimento de como funcionam os processos. Peço a você extrema atenção na leitura deste material, pois a perda no entendimento de algum detalhe pode ser muito prejudicial ao seu entendimento de toda a matéria.*

*Além de tudo isto, peço atenção sobre a maneira de se escrever. Sugiro que, caso você encontre dificuldades ao escrever, uma consulta tanto aos textos aqui fornecidos quanto a livros de apoio. Ainda assim, sugiro que você tenha contato constante com livros de gramática, especialmente nas seções de morfologia e de sintaxe. Um bom conhecimento da estrutura do idioma ajuda a melhor expressar as ideias, independentemente de haver ou não pressão para tal feito.*

*Dadas as considerações, comecemos nosso estudo. Alerto que não serão dispostos exemplos com tanta frequência.*

# 1 Introdução à análise das derivadas

Acredito já estarmos familiarizados com as noções básicas do limite, seja no plano intuitivo, seja no plano abstrato. Temos alguns limites de enorme importância para a Matemática, como um todo, bem como de alguns fatos relativos ao limite que surtem sua devida importância para os assuntos que dele dependem.

Neste contexto, analisaremos as funções reais sob outro ponto de vista: variações. As variações que mais nos são importantes neste momento são variações da função em um pequeno intervalo, a ponto de dizermos que as análises a serem feitas são de cunho *pontual*.

Já temos algum contato com variações em um dado espaço, sob um certo espaço de tempo. No estudo da Física, principalmente, temos contato com variações médias constantemente. Por outro lado, apenas as variações médias não são suficientes para uma análise mais precisa dos fenômenos que ali ocorrem. A título de exemplo, consideremos a aferição da velocidade média durante um dado percurso. Digamos que este percurso tenha extensão de 330 km e o tempo gasto para o mesmo fora de 5 horas. Assim sendo, a *velocidade média* deste percurso resulta da simples avaliação do quociente entre as duas medidas, qual seja,

$$v_{\textit{média}} = \frac{\textit{espaço percorrido}}{\textit{tempo gasto}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{330 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 66 \text{ km/h}.$$

Se diminuirmos de maneira consistente estes intervalos, poderemos determinar o comportamento desta situação de maneira mais precisa. Consideremos que, no percurso dado, há muitas curvas. Deste modo, a velocidade de percurso se torna altamente variável. Digamos que, durante 100 km deste percurso, o mesmo pôde ser realizado em 45 minutos. Neste intervalo de tempo, concluímos que a velocidade média de percurso é, então,

$$v_{\textit{média}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100 \text{ km}}{45 \text{ min}} = 2,222\ldots \text{ km/min}.$$

Esta medida não deixa de ser uma expressão da velocidade. Por outro lado, é mais confortável avaliarmos a situação em km/h. Cientes de que 1 hora equivale a 60 minutos, concluímos que 45 minutos equivalem a 3/4 de hora (0,75 hora). Deste modo, teremos

$$v_{\textit{média}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100 \text{ km}}{0,75 \text{ h}} = 133,33\ldots \text{ km/h}.$$

De fato, este indivíduo corria muito e, provavelmente, deve ter sido apanhado por algum pardal ou radar. E agora, segue uma pergunta. Como o "bendito" pardal funciona, não é? Engraçado. Mas o funcionamento do pardal exige a análise em um curto espaço, digamos, de 50 m ou menos. São instalados sensores na pista, em quatro linhas. E o curto espaço de análise é a distância entre as rodas dianteiras e traseiras do veículo. Interessante, não? Daí, com o intervalo de tempo detectado pelos sensores, é possível determinar, com um pequeno erro, a velocidade na qual os sensores foram atravessados pelo veículo. A partir daí, nossas autarquias (que deveríamos chamar "centrais nacionais de roubo") avaliam se, naquele local, é cabível a velocidade determinada e, portanto, aplicam as multas.

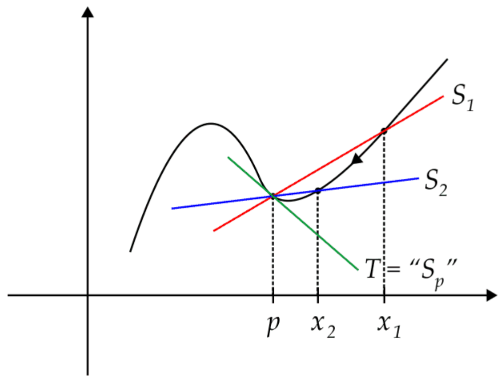
A análise que faremos a seguir reflete melhor a situação do pardal. Se pudermos representar graficamente a função definidora do percurso e tomar pontos quaisquer em aproximação, teremos uma figura semelhante à que segue:

Prestando melhor atenção ao ocorrido, se fizermos a análise sobre $x_1$ e $p$, podemos montar um triângulo retângulo e, a partir daí, determinar a inclinação entre a reta secante $S_1$ e o eixo das abscissas, $x$. Teremos, portanto, o coeficiente angular da reta $S_1$:

$$m(S_1) = \frac{f(x_1) - f(p)}{x_1 - p}.$$

Se aproximarmos mais o ponto $x_1$ do ponto $p$, passamos pelo ponto $x_2$ e, com isso, a reta secante aos dois pontos será a determinada por $S_2$. O coeficiente angular de $S_2$ é, portanto,

$$m(S_2) = \frac{f(x_2) - f(p)}{x_2 - p}.$$




E, conforme procedemos a esta aproximação, o ponto vai se tornando cada vez mais próximo de $p$, de sorte que poderemos definir o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $p$, qual seja, $T$, por

$$m(T) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Informalmente, denotamos tal limite como a *derivada de* $f$ *em* $p$. Veremos com mais precisão a estrutura real deste limite.

## 2 A definição de derivada de maneira mais precisa

No plano intuitivo, descrevemos, anteriormente, como a derivada de uma função real deve se comportar. No plano abstrato, existem outras considerações extremamente necessárias para a validação da definição intuitiva que fizemos há pouco. Introduziremos aqui algumas definições de cunho teórico. Peço que não pule estas seções de desenvolvimento, por ser necessário não só para o que se segue neste material como para informações futuras em sala de aula.

---

***Definição.*** *Considere um conjunto $X \subset \mathbb{R}$. Um número (ou ponto) $p \in \mathbb{R}$ é dito* ***ponto de acumulação*** *de $X$ (ou ponto cumulativo) se, para qualquer intervalo aberto contendo $p$, existir, em $X$ um número diferente de $p$. Em outras palavras: se $I$ é um intervalo aberto contendo $p$, então $I \cap X \neq \varnothing$ e, além disso, $I \cap X \neq \{p\}$.*

---

A definição é bem simples de ser entendida. Vamos nos limitar apenas ao uso mais corriqueiro da definição. Tome qualquer intervalo aberto $I$. Para facilitar, considere o intervalo aberto $I = (2; 3)$. Afirmo que, tanto 2 quanto 3 são pontos cumulativos de $I$. Bom. Se um intervalo aberto $J$ contiver 2, obrigatoriamente deverá conter pontos de valor maior do que 2. Do mesmo modo, o intervalo $I$ não contém nem 2 nem 3, mas só todos os outros números entre 2 e 3. Logo, $I$ contém valores maiores do que 2. Graficamente, é possível perceber que $I \cap J \neq \varnothing$ e, além disso, $I \cap J \neq \{2\}$. Do mesmo modo, se considerarmos um intervalo aberto $K$ que contenha 3, chegamos à conclusão de que $I \cap K \neq \varnothing$ e, além disso, $I \cap K \neq \{3\}$.

Um conjunto pode ter mais de um ponto cumulativo (acabamos de ver um exemplo), bem como pode ter infinitos pontos cumulativos. Quando tratamos deles de maneira genérica, indicamos, para um conjunto $X$, o dito *conjunto dos pontos de acumulação de* $X$, por $X'$. Mais exemplos desta situação podem ser encontrados em livros de Análise Real.

Agora, passemos ao que mais nos interessa no momento.

---

***Definição.*** *Considere $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, e um ponto $p \in X \cap X'$ (conforme a explicação anterior, $p$ é um ponto cumulativo de $X$ pertinente ao próprio $X$). Diremos que $f$* ***é derivável em*** *$p$ se existir o limite*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

*Em caso afirmativo, diremos, também, que o limite anterior representa a* ***derivada de*** $f$ ***em*** $p$*, e o indicaremos por* $f'(p)$.

---

Em nada este limite escapa do limite visto na seção anterior. Apenas nos limitamos a dizer quem é este limite e sob que condições este limite pode nos apresentar algo a respeito do comportamento da função $f$ mencionada na definição. Recordando um pouco de propriedades de limite, se aplicarmos uma mudança de variável, o limite anterior pode se tornar mais simples de ser calculado. Sugiro uma mudança tal que $x - p$ se reduza a uma variável.

Sendo mais precisos, se fizermos $h = x - p$, teremos por brinde que, se $x \to p$, então $h \to 0$. Logo, podemos reescrever o limite definidor da derivada como

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Como dito, em alguns casos analíticos, o cálculo se torna mais simples usando a reescrita proposta.

Se a função $f$ mencionada admitir derivada *em todos os pontos de seu domínio*, então diremos que $f$ admite uma *função derivada* e indicaremos esta função derivada por $f'$. Veremos à frente um outro contexto que nos permitirá representar esta função de outra maneira.

Não demonstrarei as funções derivadas das funções que já conhecemos. As demonstrações de tais derivadas podem ser encontradas em livros de Cálculo; mais precisamente, sugiro a consulta aos livros do Guidorizzi e do Stewart para tanto.

## 2.1 Consequências imediatas e correlatas da definição de derivada

Das definições de limite e derivada, concluímos a existência das ditas *derivadas laterais*. A definição precisa delas exige a extensão do conceito de ponto cumulativo para os ditos *pontos cumulativos laterais*. A extensão é bem simples se consideramos intervalos simétricos, como, por exemplo, $(2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon)$.

Todo intervalo aberto contendo um dado ponto obrigatoriamente contém um intervalo simétrico contendo este mesmo ponto e centrado neste ponto. Por exemplo, considerando o intervalo $I = (2; 5)$, certamente $3 \in I$. Bom. O intervalo $S = (2,5; 3,5)$, que também contém 3, pode ser reescrito como $S = (3 - 0,5; 3 + 0,5)$, mostrando que está centrado em 3. Observe que $S \subset I$. Torna-se, portanto, mais fácil a análise por intervalos simétricos do que por intervalos genéricos.

A partir das observações feitas, podemos tratar da cumulatividade lateral.

---

***Definição.*** *Considere* $X \subset \mathbb{R}$. *Um ponto* $p \in \mathbb{R}$ *é dito* ***cumulativo à esquerda*** *(ou ponto de acumulação à esquerda) se, a todo intervalo aberto* $E$ *de final* $p$*, tivermos* $E \cap X \neq \varnothing$ *e* $E \cap X \neq \{p\}$*. Com outros recursos, isto significa que* $E = (p - \varepsilon; p)$*. De modo similar,* $p$ *é dito* ***cumulativo à direita*** *se, a todo intervalo aberto* $D$ *de início* $p$*, tivermos* $D \cap X \neq \varnothing$ *e* $D \cap X \neq \{p\}$*; ou, com outras palavras, sendo* $D = (p; p + \varepsilon)$.

---

Agora, podemos definir derivadas laterais.

---

***Definição.*** *Considere* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, *e* $p \in X \cap X'_-$ *(isto significa que* $p$ *é ponto cumulativo à esquerda de* $X$ *pertinente a* $X$*). Diremos que* $f$ ***é derivável à esquerda em*** $p$ *se existir o limite*

$$\lim_{x \to p-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

*Em caso afirmativo, diremos, também, que o limite anterior representa a* ***derivada à esquerda de*** $f$ ***em*** $p$*, e o indicaremos por* $f'_-(p)$*. Similarmente, se for* $p \in X \cap X'_+$ *(isto significa que* $p$ *é ponto cumulativo à direita de* $X$ *pertinente a* $X$*), diremos que* $f$ ***é derivável à direita em*** $p$ *se existir o limite*

$$\lim_{x \to p+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

*E em caso afirmativo, diremos que o limite anterior representa a* ***derivada à direita de*** $f$ ***em*** $p$*, e o indicaremos por* $f'_{+}(p)$.

---

Apenas indiquei que, por decorrência das definições de derivada e de limite, também é aplicável a existência de derivadas à esquerda e à direita em um dado ponto. Comecemos a analisar as decorrências principais das definições dadas.

Bem sabemos que um limite em um dado ponto existe se, e somente se, os limites laterais à esquerda e à direita existirem neste mesmo ponto e forem iguais. Do mesmo modo, se trata a equivalência entre as derivadas laterais e a derivada natural. Substanciemos isto.

---

***Teorema.*** *Considere* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ *e* $p \in X \cap X'_{-} \cap X'_{+}$ *(*$p$ *é ponto cumulativo à esquerda e à direita de* $X$*). Deste modo, se existirem as derivadas laterais de* $f$ *em* $p$, $f'_{-}(p)$ *e* $f'_{+}(p)$*, e, além disso, as mesmas forem iguais, isto é,* $f'_{-}(p) = f'_{+}(p)$*, então existirá a derivada de* $f$ *em* $p$, $f'(p)$ *e esta será igual às derivadas laterais de* $f$ *em* $p$.

---

Não demonstrarei este teorema. O raciocínio básico utiliza-se da definição formal de limite e, através dele, promover combinações numéricas de modo a conciliar as condições.

Comecemos a tratar de outros assuntos importantes e interessantes. Algo importante nesta seara diz respeito à continuidade de uma função real. Tentando analisar progressivamente o assunto, poderíamos pensar que toda função contínua tem capacidade de ser derivável em seu domínio, mas não funciona desta maneira. Vejamos a razão.

---

***Teorema.*** *Considere* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$*, derivável em um ponto* $p \in X \cap X'$*. Se* $f$ *for derivável em* $p$*, então* $f$ *será contínua em* $p$.

**Esclarecimento.** Sendo $f$ derivável em $p$, existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

O que pretendemos mostrar é

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

Isto pode ser reescrito, através de propriedades de limite, como

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} f(p) \Leftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) - \lim_{x \to p} f(p) = 0 \Leftrightarrow \lim x \to p\,(f(x) - f(p)) = 0.$$

Pode parecer óbvio, mas devemos considerar o seguinte:

$$\lim_{x \to p} (x - p) = [p - p] = 0.$$

Bom. Cientes de tudo isto, podemos proceder à análise concreta. Ainda não sabemos se $f$ é contínua em $p$ dado que $f$ é derivável em $p$. Partindo da reescrita do limite definidor da continuidade e do fato de, na análise de um limite, o ponto de tendência nunca ser atingido (nesta situação equivale a $x \neq p$), temos

$$\lim_{x \to p} (f(x) - f(p)) = \lim_{x \to p} (f(x) - f(p)) \left(\frac{x - p}{x - p}\right) = \lim_{x \to p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p}\right) \cdot (x - p).$$

Só podemos continuar a avaliação devido ao fato de a derivada de $f$ em $p$ existir. Assim sendo, temos

$$\lim_{x \to p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p}\right) \cdot (x - p) = [f'(p) \cdot 0] = 0.$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x \to p} (f(x) - f(p)) = 0,$$

o que acarreta
$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$
pelo exposto anteriormente.

---

Excelente. Mostramos que se uma função for derivável num ponto, ela será contínua neste ponto. E o contrário sempre vai ocorrer? Isto é, sempre que uma função for contínua em um ponto, ela será derivável nele? Bem sabemos que não, mas nada custa reforçar. O exemplo clássico se faz através da função modular, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, que se resume a $x$, caso $x \geqslant 0$, ou $-x$, caso $x < 0$. É claro que existem várias outras funções contínuas e *não deriváveis*. Um exemplo um pouco mais elaborado é o que se segue:

---

**Exemplo.** Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$\begin{cases} f(x) = x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{para } x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$
Tentemos avaliar se existe a derivada de $f$ em zero. Através da definição, temos
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \left( x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right) \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$
Este último limite não existe, nem direta nem lateralmente. Portanto, a derivada de $f$ em zero não existe. Por outro lado, temos, dada a limitação natural da função *seno*,
$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = [0 \cdot V] = 0,$$
sendo $[0 \cdot V]$ apenas uma indicação de que se trata do produto de uma função tendente a zero por uma função limitada. Como
$$f(0) = 0,$$
temos
$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0),$$
o que garante a continuidade de $f$ em zero. Perceba aqui que tratamos de uma função *contínua* em zero mas *não derivável* em zero. Isto mostra que nem sempre uma função contínua será derivável.

---

Outra consequência imediata vem da escrita da equação da reta tangente ao gráfico de uma função em seu ponto de tangência. Partindo da definição de derivada (com a mudança de variável sugerida), temos o seguinte:
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Existindo $f'(a)$, podemos reescrevê-lo como o limite de uma constante. Assim,
$$\lim_{h \to 0} f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Desta igualdade, podemos reescrever, ainda sob a notação de limite,
$$\lim_{h \to 0} f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0.$$

A partir daí, multiplicamos e dividimos $f'(a)$ por $h$, obtendo

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(a)\cdot h}{h}-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a)+f'(a)\cdot h-f(a+h)}{h}=0.$$

Agora, podemos escrever a seguinte expressão sem nos preocuparmos com o limite, mas apenas com a existência da derivada de uma função $f$ em um ponto $a$:

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\cdot h.$$

Esta igualdade é válida quando $h=0$. Se $h\neq 0$, existirá uma diferença, que denotaremos por $\sigma$. Assim, nossa expressão se torna

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\cdot h+\sigma(h).$$

E faremos $\sigma(0)=0$ para simplificação e adequação. Se procuramos adequar a expressão anterior ao obtido da definição de derivada, dividindo a expressão por $h$ e tomando o limite quando $h\to 0$, veremos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sigma(h)}{h}=0.$$

Este fato evidencia que $\sigma$ tende a zero mais rápido do que o polinômio $h$. De modo equivalente, seria $\sigma$ tender a zero mais rápido que o polinômio $x-a$ (isto será útil na análise dos polinômios de Taylor). De modo semelhante, suponhamos existir um número $L$ para o qual se tenha

$$f(a+h)=f(a)+L\cdot h+\sigma(h), \quad \text{com } \lim_{h\to 0}\frac{\sigma(h)}{h}=0.$$

Dividindo a expressão por $h$ e tomando o limite quando $h\to 0$, teremos

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)=f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(L+\frac{\sigma(h)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}L+\lim_{h\to 0}\frac{\sigma(h)}{h}=[L+0]=L.$$

Portanto, existe a derivada de $f$ em $a$ e tal derivada é igual a este número $L$. Esta explanação será mais útil na demonstração de uma das "regras" de derivação.

# 3 Propriedades operatórias da derivada

Bom. Alcançamos o principal motivo desta discussão: a demonstração de cada propriedade envolvendo derivadas de uma função real. Agora, faça-me a tão delicada pergunta: "para que eu preciso conhecer as demonstrações?!". A rigor, pretendo que você entenda como o mecanismo funciona propriamente. Fato é que você acabará por memorizar as propriedades de tão frequente seu uso durante os trabalhos. Reitero que julgo ser necessário um bom entendimento do assunto para evitar confusões mais sérias. Ao trabalho.

Para todos os efeitos, salvo menção expressa em contrário, consideramos $f, x : D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}$, $a\in D\cap D'$ e $c\in\mathbb{R}$.

## 3.1 Derivada de produto de função por constante

Começaremos pela mais simples das propriedades e a mais frequentemente usada, uma vez que as funções geralmente são múltiplas de outras ou têm argumentos múltiplos de algum valor. Veremos que o processo é idêntico ao visto no limite: basta evidenciar a constante.

---

***Teorema.*** *Se existir a derivada de $f$ em $a$, então a derivada de $c\cdot f$ em $a$ será expressa por*

$$(cf)'(a)=c\cdot f'(a).$$

**Esclarecimento.** Existindo a derivada de $f$ em $a$, existirá o limite

$$f'(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

Bom. Analisando o que é proposto e partindo da definição de derivada, temos

$$\lim_{t \to a} \frac{(c \cdot f)(t) - (c \cdot f)(a)}{x - a} = \lim_{t \to a} \frac{c \cdot f(t) - c \cdot f(a)}{x - a} = \lim_{t \to a} \frac{c(f(t) - f(a))}{t - a}.$$

Fazendo bom uso das propriedades de limite e cientes de que $c$ é constante, obtemos

$$(cf)'(a) = \lim_{t \to a} c \cdot \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = c \cdot f'(a).$$

---

## 3.2 Derivada de soma de funções

Esta propriedade também é frequentemente usada, sobretudo em polinômios. Veremos que, neste caso, o processo é idêntico ao tratamento de limites, bastando calcular cada derivada e somar os resultados.

---

***Teorema.*** *Existindo as derivadas de $f$ e de $x$ em $a$, então*

$$(f + x)'(a) = f'(a) + x'(a).$$

**Esclarecimento.** Partiremos da definição de derivada para $(f + x)$:

$$\lim_{t \to a} \frac{(f + x)(t) - (f + x)(a)}{t - a} = \lim_{t \to a} \frac{(f(t) + x(t)) - (f(a) + x(a))}{t - a} = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a) + x(t) - x(a)}{t - a}.$$

Agora, podemos separar as expressões em soma de duas parcelas, dada a existência das derivadas de $f$ e de $x$ em $a$:

$$(f + x)'(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} + \lim_{t \to a} \frac{x(t) - x(a)}{t - a} = f'(a) + x'(a).$$

---

## 3.3 Derivada de produto de funções quaisquer

A partir daqui, o tratamento da derivada e do limite começam a entrar em discrepância. De todo modo, é necessário o cálculo das derivadas de cada função envolvida para continuar o cálculo.

Esta demonstração é, corriqueiramente, uma das mais difíceis de ser entendida, pelo fato de muitos autores simplesmente *somarem e subtraírem* um dado valor para que a demonstração seja concluída. Ao invés de fazer o mesmo, procederei por *raciocínio reverso*[1].

---

***Teorema.*** *Existindo as derivadas de $f$ e de $x$ em $a$, então*

$$(f \cdot x)'(a) = f'(a)\, x(a) + f(a)\, x'(a).$$

[1] *Raciocínio reverso* significa explorar a expressão que se deseja alcançar sem admitir uma identidade que não foi ou está a ser demonstrada.

**Esclarecimento.** Novamente, partiremos da definição de derivada para avaliar a situação. Percebamos que

$$\lim_{t\to a}\frac{(f\cdot x)(t)-(f\cdot x)(a)}{t-a}=\lim_{t\to a}\frac{f(t)\,x(t)-f(a)\,x(a)}{t-a}.$$

Sabemos que as derivadas de $f$ e de $x$ em $a$ existem. Precisamos utilizar a expressão que acabamos de obter e nela encontrarmos as expressões definidoras das derivadas de $f$ e de $x$ em $a$, mas parece impossível. Pensemos por raciocínio reverso. Para alcançar a expressão que desejamos, qual seja,

$$f'(a)\,x(a)+f(a)\,x'(a),$$

é necessário mostrar quem é isto sob termos do limite. Observemos que

$$f'(a)\,x(a)+f(a)\,x'(a)=\left(\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\right)\cdot x(a)+f(a)\cdot\left(\lim_{t\to a}\frac{x(t)-x(a)}{t-a}\right).$$

Fazendo uso das propriedades da adição e da multiplicação de limites, levando em consideração o fato de $f(a)$ e $x(a)$ serem constantes, temos

$$\begin{aligned}&\left(\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\right)\cdot x(a)+f(a)\cdot\left(\lim_{t\to a}\frac{x(t)-x(a)}{t-a}\right)=\\&\qquad=\lim_{t\to a}\left(\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\cdot x(a)+f(a)\cdot\frac{x(t)-x(a)}{t-a}\right)=\\&\qquad=\lim_{t\to a}\left(\frac{f(t)\,x(a)-f(a)\,x(a)}{t-a}+\frac{f(a)\,x(t)-f(a)\,x(a)}{t-a}\right).\end{aligned}$$

Por outro lado, da existência das derivadas de $f$ e de $x$ em $a$, concluímos que $f$ e $x$ são contínuas em $a$. Logo,

$$f(a)=\lim_{t\to a}f(t)\quad\text{e}\quad x(a)=\lim_{t\to a}x(t).$$

Fazendo uso deste fato, ao invés de tomar ambos os valores como constantes, e aplicando as propriedades de adição e de multiplicação de limites, teremos

$$\begin{aligned}&\left(\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\right)\cdot x(a)+f(a)\cdot\left(\lim_{t\to a}\frac{x(t)-x(a)}{t-a}\right)=\\&\qquad=\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\cdot\lim_{t\to a}x(t)+\lim_{t\to a}f(t)\cdot\lim_{t\to a}\frac{x(t)-x(a)}{t-a}=\\&\qquad=\lim_{t\to a}\left(\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\cdot x(t)+f(t)\cdot\frac{x(t)-x(a)}{t-a}\right)=\\&\qquad=\lim_{t\to a}\left(\frac{f(t)\,x(t)-f(a)\,x(t)}{t-a}+\frac{f(t)\,x(t)-f(t)\,x(a)}{t-a}\right).\end{aligned}$$

Bom. Nas duas situações, encontramos em duplicidade algum dos termos de que precisamos para continuar. Não encontramos, em quaisquer delas, a expressão

$$f(t)\,x(t)-f(a)\,x(a).$$

Isto nos obriga a pensar melhor sobre as considerações feitas sobre $f(a)$ e $x(a)$. Fazendo as mesmas considerações sobre ambos os valores, nada concluímos; mas, se fizermos considerações diferentes para cada qual, podemos encontrar alguma solução. Se usamos a continuidade sobre $x$ em $a$ e mantemos $f(a)$ constante, obtemos, partindo da mesma expressão e aplicando as propriedades operatórias dos limites,

$$\left(\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\right)\cdot x(a)+f(a)\cdot\left(\lim_{t\to a}\frac{x(t)-x(a)}{t-a}\right)=$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \cdot \lim_{t \to a} x(t) + f(a) \cdot \left( \lim_{t \to a} \frac{x(t) - x(a)}{t - a} \right) = \\
&= \lim_{t \to a} \frac{f(t)\,x(t) - f(a)\,x(t)}{t - a} + \frac{f(a)\,x(t) - f(a)\,x(a)}{t - a} = \\
&= \lim_{t \to a} \frac{(f(t)\,x(t) - f(a)\,x(a)) + (\mathbf{f(a)\,x(t) - f(a)\,x(t)})}{t - a} = \\
&= \lim_{t \to a} \frac{f(t)\,x(t) - f(a)\,x(a)}{t - a}.
\end{aligned}
$$

Observe bem que alcançamos exatamente o ponto que nos forçou a procurar outra saída. Partimos de dois pontos distintos, com as devidas considerações, e alcançamos um ponto comum. Logo, os pontos de partida têm de ser, obrigatoriamente, idênticos, o que força a ser

$$(f \cdot x)'(a) = f'(a)\,x(a) + f(a)\,x'(a),$$

como outrora pretendíamos.

---

Apenas uma rápida consideração. Observe o destaque feito sobre certo termo entre parênteses, qual seja,

$$f(a)\,x(t) - f(a)\,x(t).$$

É este termo, *que determinamos em nossa análise*, que é somado e subtraído nas demonstrações usuais. Os autores, geralmente, ou dizem estar *escrevendo o zero de maneira mais inteligente* ou simplesmente inserem este termo para continuar as demonstrações.

Poderíamos, também, usar a continuidade de $f$ em $a$ e manter $x(a)$ constante. Obteríamos o mesmo resultado, com possível inversão das funções nos termos que se anulam.

### 3.4 Derivada de quociente de funções

Do mesmo modo como ocorre nas demonstrações da propriedade da derivada do produto de duas funções, os autores insistem em somar e subtrair um dado valor para alcançar seu resultado final, fato que confunde muito os leitores e os impossibilita de um bom entendimento da demonstração.

De maneira similar à procedida anteriormente, demonstraremos a propriedade por raciocínio reverso.

---

***Teorema.*** *Se existirem as derivadas de $f$ e de $x$ em $a$ e adicionalmente tivermos $x'(a) \neq 0$, então*

$$\left(\frac{f}{x}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,x(a) - f(a)\,x'(a)}{(x(a))^2}.$$

**Esclarecimento.** Procederemos de maneira bem similar ao feito anteriormente. Inicialmente, partiremos da definição de derivada para o quociente citado. Isto significa

$$\lim_{t \to a} \frac{(f/x)(t) - (f/x)(a)}{t - a} = \lim_{t \to a} \frac{1}{t - a} \left( \frac{f(t)}{x(t)} - \frac{f(a)}{x(a)} \right) = \lim_{t \to a} \left( \frac{1}{t - a} \cdot \frac{f(t)\,x(a) - f(a)\,x(t)}{x(t)\,x(a)} \right).$$

Partiremos, agora, por raciocínio reverso. De posse de todas as considerações feitas sobre $f$ e $x$ em $a$, temos, ainda, a continuidade de ambas em $a$. Bom,

$$\frac{f'(a)\,x(a) - f(a)\,x'(a)}{(x(a))^2} = \frac{1}{(x(a))^2} \left( \left( \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \right) x(a) - f(a) \left( \lim_{t \to a} \frac{x(t) - x(a)}{t - a} \right) \right).$$

Paremos um momento para uma análise mais sucinta do que acabamos de obter. Desprezando temporariamente o termo

$$\frac{1}{(x(a))^2},$$

analisemos o termo restante,

$$\left(\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\right)x(a)-f(a)\left(\lim_{t\to a}\frac{x(t)-x(a)}{t-a}\right).$$

Perceba que voltamos, em parte, à controvérsia levantada na demonstração anterior. Promovendo as mesmas considerações feitas, isto é, mantendo $f(a)$ e $x(a)$ constantes, somos conduzidos a

$$\begin{aligned}\left(\lim_{t\to a}\frac{(f(t)-f(a))\,x(a)}{t-a}\right.&\left.-\lim_{t\to a}\frac{f(a)\,(x(t)-x(a))}{t-a}\right)=\\ &=\lim_{t\to a}\frac{f(t)\,x(a)-f(a)\,x(a)-f(a)\,x(t)+f(a)\,x(a)}{t-a}=\\ &=\lim_{t\to a}\frac{(f(t)\,x(a)-f(a)\,x(t))+(\mathbf{f(a)\,x(a)-f(a)\,x(a)})}{t-a}=\\ &=\lim_{t\to a}\frac{f(t)\,x(a)-f(a)\,x(t)}{t-a}.\end{aligned}$$

Agora, voltemos à análise do termo que desprezamos temporariamente. Observe que podemos reescrever o termo quadrático como produto de fatores idênticos:

$$\frac{1}{(x(a))^2}=\frac{1}{x(a)}\cdot\frac{1}{x(a)}.$$

Fazendo uso da continuidade de $x$ em $a$, podemos escrever

$$\frac{1}{x(a)}\cdot\frac{1}{x(a)}=\frac{1}{x(a)}\cdot\frac{1}{\lim_{t\to a}x(t)},$$

e, portanto, através das propriedades operatórias dos limites e do fato de o limite de uma constante ser constante, escrevemos

$$\frac{1}{x(a)}\cdot\frac{1}{\lim_{t\to a}x(t)}=\lim_{t\to a}\frac{1}{x(a)\,x(t)}.$$

Das considerações feitas e dos resultados obtidos, bem como da aplicação das propriedades operatórias dos limites, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x(a))^2}\left(\left(\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\right)x(a)\right.&\left.-\,f(a)\left(\lim_{t\to a}\frac{x(t)-x(a)}{t-a}\right)\right)=\\ &=\lim_{t\to a}\frac{1}{x(a)\,x(t)}\cdot\lim_{t\to a}\frac{f(t)\,x(a)-f(a)\,x(t)}{t-a}=\\ &=\lim_{t\to a}\frac{1}{t-a}\cdot\frac{f(t)\,x(a)-f(a)\,x(t)}{x(a)\,x(t)}.\end{aligned}$$

Caímos, portanto, na mesma sistemática da demonstração da propriedade anterior: partimos de termos distintos e alcançamos um termo comum. Isto obriga os dois termos de partida a serem iguais. Concluímos desta discussão que

$$\left(\frac{f}{x}\right)'(a)=\frac{f'(a)\,x(a)-f(a)\,x'(a)}{(x(a))^2}.$$

---

Novamente, observação necessária sobre o termo destacado durante a demonstração, qual seja,

$$f(a)\,x(a)-f(a)\,x(a).$$

Este termo, *que determinamos durante nossa análise*, é somado e subtraído com o pretexto de ser uma reescrita inteligente do zero ou, simplesmente, inserido para concluir a demonstração.

Outra observação importante é: se substituíssemos $x(a)$ e $f(a)$ pelos seus limites por continuidade, ao invés de deixá-los constantes no início, alcançaríamos o mesmo resultado. Só não seria possível fazer exatamente o que fizemos para o produto (substituir um e deixar o outro como constante), sob pena de desenvolver um cálculo sem sentido e sem fim.

## 3.5 Derivada de composição de funções

Agora, faremos uso da última observação feita na seção anterior. Recordemos que, dada a existência da derivada de uma função $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, num ponto $p \in X \cap X'$, podemos escrever a sentença

$$f(p+h) = f(p) + f'(p) \cdot h + \sigma(h), \quad \text{com } \lim_{h \to 0} \frac{\sigma(h)}{h} = 0.$$

A composição de funções é uma operação que, em geral, não é *linear*. Como se trata de uma substituição de argumentos variáveis entre si, nem sempre se aplicam, de modo direto, as propriedades que demonstramos há pouco.

Recordemos que é requisito para a composição de $x$ com $f$ o fato de a imagem de $f$ estar inteiramente contida no domínio de $x$. Tendo em vista tais considerações, faremos algumas mudanças para adequar melhor o raciocínio com as considerações já feitas.

---

***Teorema.*** *Consideremos* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, *e* $a \in D \cap D'$; $x : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, *e* $b \in M \cap M'$; *por fim,* $b = f(a)$ *e* $f(D) \subset M$. *Se* $f$ *é derivável em* $a$ *e* $x$ *o é em* $b$, *então a função composta* $x \circ f : D \to \mathbb{R}$ *é derivável em* $a$ *e se tem*

$$(x \circ f)'(a) = x'(f(a)) \cdot f'(a).$$

**Esclarecimento.** Comecemos analisando as considerações feitas sob o ponto de vista há pouco levantado. Sendo $f$ derivável em $a$ e $x$, em $b = f(a)$, podemos escrever

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \sigma(h), \quad \text{com } \lim_{h \to 0} \frac{\sigma(h)}{h} = 0;$$

$$x(b+k) = x(b) + x'(b) \cdot k + \omega(k), \quad \text{com } \lim_{k \to 0} \frac{\omega(k)}{k} = 0.$$

Por questão de simplicidade, faremos

$$S(h) = \frac{\sigma(h)}{h} \quad \text{e} \quad W(k) = \frac{\omega(k)}{k},$$

nos conduzindo a

$$f(a+h) = f(a) + (f'(a) + S(h)) \cdot h, \quad \text{com } \lim_{h \to 0} S(h) = 0;$$

$$x(b+k) = x(b) + (x'(b) + W(k)) \cdot k, \quad \text{com } \lim_{k \to 0} W(k) = 0.$$

Ora. Sabemos que a imagem de $f$ está contida no domínio de $x$ e, além disso, $b = f(a)$. Consideremos um intervalo $J$ contendo $b$, digamos $J = (b-k; b+k)$ e seja $\Lambda = J \cap M$. Podemos restringir ainda mais a situação forçando a interseção diretamente com a imagem de $f$, ou seja, tomamos $\Lambda = J \cap f(D)$. Deste modo, tomando $k$ de modo que $b + k \in \Lambda$, o acréscimo $k$ pode ser representado seguramente pela diferença entre dois valores da imagem de $D$ por $f$. Isto significa que existe um acréscimo $h$, com $a + h \in D$, para o qual se tenha

$$f(a+h) = b + k \Rightarrow k = f(a+h) - b \Leftrightarrow k = f(a+h) - f(a).$$

Reciprocamente, para todo acréscimo $h$, com $a + h \in D$, teremos $f(a+h) \in M$, que nos fornece, instantaneamente, um acréscimo $k$ para $f(a) = b$. Fazendo ainda $S(0) = W(0) = 0$, teremos a continuidade de $S$ e de $W$ em zero devido às considerações iniciais. Tomando a expressão dada para $f$, obtemos, ainda,

$$f(a+h) - f(a) = (f'(a) + S(h)) \cdot h,$$

conduzindo-nos a

$$k = (f'(a) + S(h)) \cdot h.$$

Assim sendo, temos

$$\begin{aligned}(x \circ f)(a+h) &= x(f(a+h)) = x(b+k) = x(b) + (x'(b) + W(k)) \cdot k = \\ &= x(b) + (x'(b) + W(k))(f'(a) + S(h)) \cdot h = \\ &= x(b) + (\mathbf{x'(b) \cdot f'(a)} + x'(b) \cdot S(h) + f'(a) \cdot W(k) + W(k) \cdot S(h)) \cdot h = \\ &= x(b) + (x'(b) \cdot f'(a)) \cdot h + (x'(b) \cdot S(h) + f'(a) \cdot W(k) + W(k) \cdot S(h)) \cdot h.\end{aligned}$$

Analisemos a última expressão entre parênteses. Com a primeira consideração feita sobre $k$, temos

$$\begin{aligned}&x'(b) \cdot S(h) + f'(a) \cdot W(k) + W(k) \cdot S(h) = \\ &\qquad = x'(b) \cdot S(h) + f'(a) \cdot W(f(a+h) - f(a)) + W(f(a+h) - f(a)) \cdot S(h),\end{aligned}$$

ou seja, toda a expressão depende diretamente de $h$. Fazendo $h \to 0$, concluímos que

$$\begin{aligned}&\lim_{h \to 0} (x'(b) \cdot S(h) + f'(a) \cdot W(f(a+h) - f(a)) + W(f(a+h) - f(a)) \cdot S(h)) = \\ &\qquad = [(x'(b) \cdot 0) + (f'(a) \cdot W(f(a) - f(a))) + (W(f(a) - f(a)) \cdot 0)] = \\ &\qquad = [0 + f'(a) \cdot W(0) + 0] = 0.\end{aligned}$$

Devido a este fato, podemos denotar toda a expressão por $T(h)$ e, com isso, escrever

$$\begin{aligned}(x \circ f)(a+h) &= x(b) + (x'(b) \cdot f'(a)) \cdot h + T(h) \cdot h = \\ &= x(f(a)) + (x'(f(a)) \cdot f'(a) + T(h)) \cdot h, \quad \text{com } \lim_{h \to 0} T(h) = 0.\end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que

$$(x \circ f)'(a) = x'(f(a)) \cdot f'(a).$$

---

Esta demonstração não é tão simples de ser feita a partir das noções básicas de derivada. Vemos muito nas demonstrações contidas em livros de Cálculo o uso implícito da propriedade que usamos há pouco, sem explicações ou pormenores.

Conforme eu dissera no início deste material, tratamos da sede teórica do assunto. Procurei mostrar como o processo de derivação funciona efetivamente. Isto não significa que você deva demonstrar todas as derivadas das funções com as quais você já está habituado a trabalhar. Conforme o convite, trata-se apenas de *informação para compreensão do assunto*.

## 3.6 Resumo (compilação)

De acordo com o que vimos, são as seguintes as propriedades operatórias da derivada: é possível tratar as operações básicas das funções por meio da derivada e:

- [*Produto de constante por função*] Sendo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D \cap D'$ e $c \in \mathbb{R}$, se $f$ for derivável em $a$, então $c \cdot f : D \to \mathbb{R}$ também será derivável em $a$ e se tem

$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a).$$

- [*Soma de funções*] Sendo $f, x : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, e $a \in D \cap D'$, se $f$ e $x$ forem deriváveis em $a$, então $f + x : D \to \mathbb{R}$ também será derivável em $a$ e se tem

$$(f + x)'(a) = f'(a) + x'(a).$$

- [*Produto de funções*] Sendo $f, x : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, e $a \in D \cap D'$, se $f$ e $x$ forem deriváveis em $a$, então $f \cdot x : D \to \mathbb{R}$ também será derivável em $a$ e se tem

$$(f \cdot x)'(a) = f'(a) \cdot x(a) + f(a) \cdot x'(a).$$

- [*Quociente de funções*] Sendo $f, x : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, e $a \in D \cap D'$, se $f$ e $x$ forem deriváveis em $a$ e $x'(a) \neq 0$, então $f/x : D \to \mathbb{R}$ também será derivável em $a$ e se tem

$$\left(\frac{f}{x}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot x(a) - f(a) \cdot x'(a)}{(x'(a))^2}.$$

- [*Composição de funções*] Sendo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D \cap D'$ e $x : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $b \in M \cap M'$, se $f(D) \subset M$, $b = f(a)$, $f$ for derivável em $a$ e $x$, em $b$, então $x \circ f : D \to \mathbb{R}$ também será derivável em $a$ e se tem

$$(x \circ f)'(a) = x'(f(a)) \cdot f'(a).$$

# 4 As funções elementares e suas derivadas

O que dizemos ser *funções elementares* são as funções com as quais lidamos com maior frequência nos mais variados contextos. Podemos escaloná-las de acordo com a facilidade de trabalho e de manuseio. As mais simples são as funções polinomiais; depois, as sinodais ou trigonométricas; em seguida, as exponenciais e as logarítmicas; por fim, as funções trigonométricas inversas.

Além disso, tais funções são ditas *elementares* por formarem, de um modo mais sucinto, a base de praticamente todas as funções com as quais trabalhamos. Dificilmente trabalhamos com funções que não são dispostas por uma expressão algébrica (ou várias), salvo em ambiente abstrato. Comecemos as nossas avaliações.

Para todos os efeitos, considere o domínio das funções avaliadas sendo o maior subconjunto possível de $\mathbb{R}$ para a função, para evitarmos definir o domínio para toda função que avaliarmos.

## 4.1 Funções polinomiais

As funções polinomiais decorrem do uso de polinômios como modelo para algum comportamento. Devido ao próprio comportamento destas funções, por vezes se faz necessário o uso delas em um intervalo muito restrito.

Por outro lado, as funções polinomiais são as mais simples de se trabalhar em praticamente qualquer aspecto, de sorte que é preferível, em qualquer estudo, procurar aproximar a modelagem de um dado problema a uma forma polinomial.

- $f(x) = 1$;
- $s(t) = t^2 - 2t + 6$;
- $w(k) = 17 - k \ldots$

Devido às propriedades relativas às operações com limites, concluímos que é suficiente analisar o comportamento da derivada apenas nos ditos monômios (potências de uma dada variável com expoentes naturais). A partir daí, estendemos o raciocínio para as potências mais gerais. A extensão para as potências de expoente real exige um pouco mais de cautela e será demonstrada mais à frente, com o uso das propriedades que demonstramos anteriormente.

---

***Teorema.*** *Seja $n \neq 0$ um número natural. São válidas as seguintes expressões:*

a) $f(t) = t^n \;\Rightarrow\; f'(t) = n \cdot t^{n-1}$;

b) $f(t) = t^{-n} \;\Rightarrow\; f'(t) = -n \cdot t^{-n-1}$, *com* $t \neq 0$;

c) $f(t) = t^{1/n} \;\Rightarrow\; f'(t) = \dfrac{1}{n} \cdot t^{(1/n)-1}$, *onde* $t > 0$, *se* $n$ *for par, e* $t \neq 0$, *se* $n$ *for ímpar.*

**Esclarecimento.**
a) Partindo da definição de derivada, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to t}\frac{x^n-t^n}{x-t} &= \lim_{x\to t}\left(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot t+x^{n-3}\cdot t^2+\ldots+t^{n-1}\right)=\\ &= \underbrace{\left[t^{n-1}+t^{n-2}\cdot t+t^{n-3}\cdot t^2+\ldots+t^{n-1}\right]}_{n \text{ parcelas}}=\\ &= \underbrace{\left[t^{n-1}+t^{n-1}+t^{n-1}+\ldots+t^{n-1}\right]}_{n \text{ parcelas}}=n\cdot t^{n-1}.\end{aligned}$$

O resultado da divisão no limite foi feito por avaliação direta (para visualizar melhor, fixe um valor para $n$, digamos, $n=5$ e efetue a divisão de polinômios).

b) Novamente, partindo da definição de derivada, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to t}\frac{x^{-n}-t^{-n}}{x-t} &= \lim_{x\to t}\left(\frac{1}{x^n}-\frac{1}{t^n}\right)\frac{1}{x-t}=\lim_{x\to t}\frac{t^n-x^n}{x-t}\cdot\frac{1}{x^nt^n}=\lim_{x\to t}\frac{x^n-t^n}{x-t}\cdot\frac{(-1)}{x^nt^n}=\\ &= \left[\left(n\cdot t^{n-1}\right)\cdot\frac{(-1)}{t^n\cdot t^n}\right]=\left[-n\cdot\frac{t^n\cdot t^{-1}}{t^n\cdot t^n}\right]=-n\cdot t^{-n-1}.\end{aligned}$$

Na avaliação, usamos o resultado anterior.

c) Partindo da definição, temos

$$\lim_{x\to t}\frac{x^{1/n}-t^{1/n}}{x-t}=\lim_{x\to t}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{t}}{x-t}.$$

Com certeza, é melhor trabalhar com potências de expoentes inteiros do que com potências com expoentes fracionários. Assim sendo, procedemos às mudanças de variável $\nu=\sqrt[n]{x}$ e $\mu=\sqrt[n]{t}$, temos, para $x\to t$, o equivalente a $\nu\to\mu$. Decorre imediatamente, da mudança proposta, $x=\nu^n$ e $t=\mu^n$. Assim, o limite anterior se torna

$$\begin{aligned}\lim_{x\to t}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{t}}{x-t} &= \lim_{\nu\to\mu}\frac{\nu-\mu}{\nu^n-\mu^n}=\lim_{\nu\to\mu}\left(\frac{\nu^n-\mu^n}{\nu-\mu}\right)^{-1}=\\ &= \left[\left(n\cdot\mu^{n-1}\right)^{-1}\right]=\left[\frac{1}{n}\cdot\mu^{-n+1}\right]=\left[\frac{1}{n}\cdot\left(t^{1/n}\right)^{1-n}\right]=\frac{1}{n}\cdot t^{(1/n)-1}.\end{aligned}$$

---

Conforme comentado, a extensão do raciocínio para potências de expoente real demanda ainda um trabalho mais árduo. Antes disto, vejamos as derivadas de outras funções.

## 4.2 Funções sinodais

As funções sinodais básicas têm algumas propriedades peculiares interessantes: são periódicas (o período delas varia de acordo com seu argumento) e limitadas em um intervalo fechado, fatos estes que auxiliam no tratamento de fenômenos oscilatórios, como, por exemplo, o movimento de um pêndulo sujeito a uma angulação ínfima.

Alguns exemplos de funções sinodais:

- $\operatorname{sen}(12t-4)$;
- $\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)$;
- $\operatorname{tg} h=\dfrac{\operatorname{sen} h}{\cos h}$;

- $\sec(h-\pi) = \dfrac{1}{\cos(h-\pi)} \dots$

As funções sinodais básicas são o *seno* e o *cosseno*. As demais (tangente, secante, ...) são funções sinodais *derivadas* ou *estendidas*. Para trabalhar com todas as funções sinodais, basta conhecer o comportamento das funções básicas. Vamos a elas.

---

***Teorema.*** *Para as funções sinodais básicas, são válidas as expressões:*
a) $f(t) = \operatorname{sen} t \;\Rightarrow\; f'(t) = \cos t$;
b) $f(t) = \cos t \;\Rightarrow\; f'(t) = -\operatorname{sen} t$.

**Esclarecimento.** Ao invés de utilizarmos a definição tradicional de derivada, conforme fizemos anteriormente, utilizaremos a definição modificada por ser, para este caso, mais simples de manipular durante a avaliação.

a) Partindo da definição de derivada, temos

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t+h)-\operatorname{sen} t}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} t\cos h+\operatorname{sen} h\cos t-\operatorname{sen} t}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\cdot\operatorname{sen} t+\frac{\operatorname{sen} h\cos t}{h}\right).\end{aligned}$$

Recordemos, de quando tratamos os limites fundamentais, que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = 0.$$

Assim, podemos continuar o cálculo em questão e concluir que

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\cdot\operatorname{sen} t+\frac{\operatorname{sen} h\cos t}{h}\right) = [0\cdot\operatorname{sen} t+1\cdot\cos t] = \cos t.$$

b) Partindo, novamente, da definição de derivada, temos

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos(t+h)-\cos t}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos t\cos h-\operatorname{sen} h\operatorname{sen} t-\cos t}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\cdot\cos t-\frac{\operatorname{sen} h\operatorname{sen} t}{h}\right) =\\ &= [0\cdot\cos t-1\cdot\operatorname{sen} t] = -\operatorname{sen} t.\end{aligned}$$

---

## 4.3 Funções exponencial e logarítmica

Muitos têm mais medo destas funções do que das funções sinodais, principalmente da função logarítmica. As funções exponenciais e logarítmicas são, em geral, as mais bem comportadas quanto aos seus ritmos, porque são *monótonas*, isto é, ou são crescentes ou são decrescentes: seus comportamentos não se alteram ao longo de seus domínios.

A função logarítmica, ao contrário do que muitos pensam, é bem simples de ser manuseada (mas não de ser avaliada diretamente). Ela é capaz de reduzir o ritmo de qualquer função a um ritmo próximo ao de uma progressão aritmética. Em vários casos, é preferível, para efeitos de avaliação, submeter a situação à aplicação de uma ou mais funções logarítmicas.

Além disso, as funções exponencial e logarítmica são inversas uma da outra quando da definição precisa de seus domínios e contradomínios. Vejamos alguns exemplos.

- $\log_{12}(17t-5)$;

- $e^{3x-11}$;
- $\ln(10000 - t)$;
- $(1,037)^{16t-\pi}\ldots$

Apesar da inclusão de logarítmicas e exponenciais de quaisquer ordens e bases, iremos começar com as ditas *naturais*, isto é, cujas bases são iguais a $e$.

---

***Teorema.*** *Para as funções exponencial e logarítmica naturais, são válidas as expressões:*

a) $f(t) = e^t \;\Rightarrow\; f'(t) = e^t$;

b) $f(t) = \ln t \;\Rightarrow\; f'(t) = \dfrac{1}{t} = t^{-1}$.

**Esclarecimento.** De modo semelhante ao que fizemos para as funções sinodais, usaremos a definição modificada de derivada.

a) Partindo da definição, temos

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{t+h} - e^t}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h}\cdot e^t = e^t\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h}.$$

Reportando-nos, ainda, aos limites fundamentais, cientes de que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

concluímos que

$$e^t\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = \left[e^t\cdot 1\right] = e^t.$$

b) Agora, para a função logarítmica, a situação será um pouco diferente. Partindo da definição e usando-nos das propriedades peculiares da função logarítmica, temos

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(t+h) - \ln t}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln\left(\frac{t+h}{t}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln\left(1 + \frac{h}{t}\right).$$

Ainda dentro das mesmas propriedades, podemos escrever

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln\left(1 + \frac{h}{t}\right) = \lim_{h\to 0}\ln\left(1 + \frac{h}{t}\right)^{1/h}.$$

Por outro lado, não é possível continuar a resolução de maneira direta. Como as funções logarítmica e exponencial são inversas uma da outra (conforme mencionado anteriormente), algo que pode vir a se tornar interessante é usar algo relativo ao número de Euler, $e$. Ainda nos reportando aos limites fundamentais,

$$\lim_{n\to +\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Se fizermos a mudança de variável $u = 1/n$, teremos, para $n \to +\infty$, $u \to 0$. Isto nos conduz a

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u} = e.$$

Assim sendo, se operarmos a mudança de variável $u = h/t$, teremos $h = u\cdot t$, de onde tiramos que, se $h \to 0$, então $u \to 0$. Procedendo à substituição proposta, resulta-nos

$$\lim_{h\to 0}\ln\left(1 + \frac{h}{t}\right)^{1/h} = \lim_{u\to 0}\ln\left(1 + \frac{ut}{t}\right)^{\frac{1}{ut}} = \lim_{u\to 0}\ln\left(\left(1 + \frac{ut}{t}\right)^{\frac{1}{u}}\right)^{\frac{1}{t}}.$$

De reversão das propriedades da função logarítmica, segue-se

$$\lim_{u\to 0} \ln\left(\left(1+\frac{ut}{t}\right)^{\frac{1}{u}}\right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{t}\cdot \ln\left(1+u\right)^{1/u} = \left[\frac{1}{t}\cdot \ln e\right] = \frac{1}{t}.$$

---

Agora, estamos prontos para tratar de possíveis extensões das expressões que acabamos de validar.

### 4.4 Extensões das funções elementares

Discutimos, na seção *4.1*, a respeito das derivadas das funções polinomiais, de expoentes inteiros e fracionários. Dissemos que, para a extensão a expoentes reais, precisávamos de um pouco mais de trabalho. De fato, não poderíamos tratar desta extensão de maneira direta sem a avaliação da função exponencial.

---

***Teorema.*** *Para qualquer número real* $r$, *tem-se, onde o domínio permitir,*

- $f(t) = t^r \Rightarrow f'(t) = r\cdot t^r$.

**Esclarecimento.** A partir de agora, faremos uso somente das propriedades que já mencionamos. Não mais nos reportaremos à definição de derivada. Assim sendo, usando-nos de propriedades das funções logarítmica e exponencial, escrevemos

$$t^r = \exp\left(\ln\left(t^r\right)\right) = \exp\left(r\cdot \ln\left(t\right)\right).$$

Já vimos que as funções logarítmica e exponencial são deriváveis e vimos quais são as expressões que devidamente definem estas derivadas na seção *4.3*. Usando-nos da propriedade relativa à derivada de função composta, vista na seção *3.5*, escrevemos

$$\begin{aligned}\left(t^r\right)' = \left(\exp\left(r\cdot \ln\left(t\right)\right)\right)' &= \mathbf{exp}'\left(r\cdot \ln\left(t\right)\right)\cdot \left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{ln}\left(\mathbf{t}\right)\right)' = \\ &= \exp\left(r\cdot \ln\left(t\right)\right)\cdot \left(r\cdot \left(\ln t\right)'\right) = \\ &= \exp\left(r\cdot \ln\left(t\right)\right)\cdot r\cdot \frac{1}{t} = \\ &= t^r\cdot r\cdot \frac{1}{t} = r\cdot t^{r-1}.\end{aligned}$$

---

Concluímos ser válida, portanto, a expressão usual comum de se memorizar sobre as funções polinomiais.

Tratemos de mais duas extensões importantíssimas, sobre as funções exponencial e logarítmica, que não mencionamos na seção própria por se tratar de observação semelhante.

---

***Teorema.*** *Se* $r$ *é um número real para o qual é possível a definição das funções exponencial e logarítmica que o utilizem como base (base arbitrária), então são válidas as expressões*

a) $f(t) = r^t \;\Rightarrow\; f'(t) = r^t\cdot \ln r$;

b) $f(t) = \log_r t \;\Rightarrow\; f'(t) = \dfrac{1}{t\cdot \ln r}$.

**Esclarecimento.** Conforme tratamos anteriormente, não faremos uso direto da definição de derivada. Faremos uso apenas das propriedades demonstradas anteriormente.

a) A partir das propriedades das funções exponencial e logarítmica, podemos escrever

$$r^t = \exp\left(\ln\left(r^t\right)\right) = \exp\left(t \cdot \ln r\right).$$

De acordo com o que descrevemos nas seções *4.3* e *3.5*, temos

$$\begin{aligned}\left(r^t\right)' = \left(\exp\left(t \cdot \ln r\right)\right)' = \mathbf{exp'}\left(t \cdot \ln r\right) \cdot \left(\mathbf{t} \cdot \mathbf{ln}\,\mathbf{r}\right)' =& \\ = \exp\left(t \cdot \ln r\right) \cdot \ln r = r^t \cdot \ln r.&\end{aligned}$$

b) De acordo com as propriedades da função logarítmica, alternamos a base do logaritmo para e como se segue:

$$\log_r t = \frac{\log_e t}{\log_e r} = \frac{\ln t}{\ln r}.$$

De acordo com o explorado nas seções *4.3* e *3.1*, temos

$$\left(\log_r t\right)' = \left(\frac{\ln t}{\ln r}\right)' = \frac{1}{\ln r} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t \cdot \ln r}.$$

---

As derivadas das funções trigonométricas não são extensões de um contexto restrito para um contexto geral, como ocorreu nas funções polinomial, exponencial e logarítmica, há pouco descritas. Para concluir as expressões usualmente vistas para tais funções, basta reescrevê-las de acordo com suas definições sobre seno e cosseno e usar as propriedades propostas nas seções de *3.1* a *3.5*.

Para as funções descritas nesta seção, houve passagens cruciais. Para as funções polinomiais, estendemos a expressão vista para *números racionais* à validade para *números reais*. O salto, em termos analíticos, é tremendo. Não é possível a extensão diretamente da definição de derivada, pois quase nunca é possível escrever expressões envolvendo expoentes reais através de raízes ou de quocientes. Para a função exponencial, estendemos a definição restrita a *um número real* para *todos os números reais não nulos*. Do mesmo modo, não é tão imediata a visualização deste fato partindo da definição de derivada. Para a função logarítmica, *é possível fazer a extensão por meio da definição de derivada*, mas seria maçante fazê-lo, por repetir, salvo a observação feita, tudo o que foi feito para a validade da expressão principal.

### 4.5 Funções inversas: existência e derivabilidade

Falamos, no início da seção, sobre funções trigonométricas inversas, e, quando tratamos das funções exponencial e logarítmica, que são inversas uma da outra. Mas, de fato, o que vem a ser uma *função inversa*?

Consideremos uma função $f : X \to Y$, $X, Y \subset \mathbb{R}$. Há, neste contexto, *duas* qualificações para f:

- f é ***injetiva*** se, para $p, t \in X$, com $p \neq t$, tivermos $f(p) \neq f(t)$; em outras palavras, significa que, para dois pontos distintos quaisquer do domínio de f, devemos ter imagens distintas;
- f é ***sobrejetiva*** se, para qualquer $k \in Y$, existir $p \in X$ de modo que $f(p) = k$; isto é, todo elemento do contradomínio de f é atingido por, no mínimo, um elemento do domínio de f.

Vários autores insistem em enquadrar como qualificação específica a *bijetividade* de uma função. Uma função que é, ao mesmo tempo, injetiva e sobrejetiva, é bijetiva. Nelas, todo elemento do contradomínio é atingido por somente um elemento do domínio, isto é, vale a relação inversa de injetividade: $f(p) \neq f(t)$ resulta em $p \neq t$.

Nesta seara, podemos definir a invertibilidade de uma função. A rigor, sempre podemos falar em *imagem inversa* de uma função, que significa tomar um subconjunto do contradomínio de uma função e determinar um subconjunto do domínio cuja imagem seja tal subconjunto. Simbolicamente, significa: dado $S \subset Y$, existe $\Sigma \subset X$ tal que $f(\Sigma) = S$. Isto é indicado por $\Sigma = f^{-1}(S)$ ou, o que é mais preferível para evitar confusões, $\Sigma = \operatorname{Inv} f(S)$.

Comecemos definindo a invertibilidade propriamente dita de uma função.

---

***Definição.*** *Uma função* $f : X \to Y$, $X, Y \subset \mathbb{R}$, *é dita **invertível** se existir uma função* $g : Y \to X$, *de modo que* $g \circ f(t) = t$.

---

Perceba que isto só pode ser definido para funções bijetivas. *De fato, é impossível uma função somente injetiva ou somente sobrejetiva ser invertível*: no primeiro caso, existiriam elementos que, possivelmente, não teriam imagem; no segundo caso, existiriam elementos que, possivelmente, teriam mais de uma imagem; fatos tais que impossibilitam a existência de uma função.

Assim sendo, existe um escopo mínimo para que as funções exponencial e logarítmica sejam invertíveis e inversas uma da outra. Para tanto, é mínimo que sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(t) = e^t$, e $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g(t) = \ln t$, tais definições. Assim sendo, *definimos a relação de invertibilidade de ambas* por

$$\ln t = k \Leftrightarrow \log_e t = k \Leftrightarrow t = e^k.$$

Diante desta situação, nos perguntamos: "é possível que uma função admita inversa e, além disso, tal inversa seja derivável?". É certo que, se for possível a invertibilidade de uma função, teremos uma relação direta entre a função e sua inversa. Isto nos permite visualizar uma *prévia* de seu comportamento. De imediato, não é possível dizer que a função inversa preservará todas as propriedades observadas na função original, tais como continuidade, derivabilidade, e outras.

Por outro lado, se a função inicial é derivável, é plausível supor que, se esta função for invertível, então a inversa também será derivável. De fato, há a preservação das propriedades originais de uma função por parte de sua inversa, desde que a função original não possua comportamento abrupto (muito estranho). Tal fato decorre diretamente do que ora demonstramos a respeito da derivada de uma função composta.

---

***Teorema.*** *Seja* $f : X \to Y$, $X, Y \subset \mathbb{R}$, *uma função que possua inversa* $g = \operatorname{Inv} f : Y \to X$. *Se* $f$ *é derivável no ponto* $a \in X \cap X'$ *e* $g$ *é contínua no ponto* $b = f(a)$, *então* $g$ *é derivável em* $b$ *se, e somente se,* $f'(a) \neq 0$. *Em caso afirmativo, tem-se* $g'(b) = 1/f'(a)$.

**Esclarecimento.** Sendo $g$ inversa de $f$, então, a todo $t \in X$, se tem $g \circ f(t) = t$. Logo, $g(b) = g(f(a)) = a$. Sendo $g$ é contínua em $b$, então

$$\lim_{y \to b} g(y) = g(b) = a.$$

Dada a bijetidade de $f$ (e, portanto, a de $g$), então, para $y \neq b$, obrigatoriamente se tem $g(y) \neq a$. Da definição de derivada e da invertibilidade mútua entre $f$ e $g$ segue-se

$$\begin{aligned}\lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} &= \lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y \to b} \frac{g(y) - a}{f(g(y)) - f(a)} = \\ &= \lim_{y \to b} \left( \frac{f(g(y)) - f(a)}{g(y) - a} \right)^{-1} = \left( \lim_{y \to b} \frac{f(g(y)) - f(a)}{g(y) - a} \right)^{-1} = (f'(a))^{-1} = \frac{1}{f'(a)}.\end{aligned}$$

A última expressão obriga a se ter $f'(a) \neq 0$. Reciprocamente, da relação de invertibilidade mútua entre $f$ e $g$ e sendo $f'(a) \neq 0$, temos, onde $g$ for derivável,

$$g \circ f(t) = t \Rightarrow (g \circ f)'(t) = (t)' \Rightarrow g'(f(t)) \cdot f'(t) = 1 \Rightarrow g'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)}.$$

Supondo $g$ derivável em $b$, concluímos

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

---

Recomendo não memorizar a expressão de modo imediato. Nestes casos, utilize-se sempre da propriedade da função composta sobre a *inversa*.

## 4.6 Derivadas das funções trigonométricas inversas

Agora, temos uma visão um pouco mais ampla da derivada que nos permite avaliar algumas funções para as quais não temos uma expressão específica. Geralmente, em Física, quando tratamos de oscilações, precisamos determinar ângulos considerando dados valores como resultados de avaliações trigonométricas (seno, cosseno, tangente, ...). Sob certas condições, é possível definir uma amplitude de inversão para as funções trigonométricas. Trataremos aqui apenas das mais importantes.

Restringindo a função $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s(x) = \operatorname{sen} x$, para $s_i : [-\pi/2; \pi/2] \to [-1; 1]$, concluímos que a mesma será bijetiva e, portanto, invertível. Sendo assim, existe a função inversa $as = \operatorname{Inv} s_i : [-1; 1] \to [-\pi/2; \pi/2]$, comumente indicada por $\operatorname{arcsen} x$. Não é possível, de modo direto, determinar se $as$ é derivável e nem, caso seja, a expressão de sua derivada. Por outro lado, através do dito há pouco, podemos determinar não só para $as$, como para $ac = \operatorname{Inv} c_i : [-1; 1] \to [0; \pi]$, referente a $\arccos x$, e $at = \operatorname{Inv} t : \mathbb{R} \to (-\pi/2; \pi/2)$, referente a $\operatorname{arctg} x$.

---

***Teorema.*** *As inversas das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, de acordo com as restrições a seguir, são deriváveis e possuem as seguintes expressões:*

a) $\operatorname{arcsen} = as : [-1; 1] \to [-\pi/2; \pi/2] \Rightarrow as'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$;

b) $\arccos = ac : [-1; 1] \to [0; \pi] \Rightarrow ac'(t) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - t^2}}$;

c) $\operatorname{arctg} = at : \mathbb{R} \to (-\pi/2; \pi/2) \Rightarrow at'(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}$.

**Esclarecimento.** Dada a continuidade das funções seno, cosseno e tangente em seus domínios, segue-se a continuidade de suas inversas, de acordo com as restrições aqui apresentadas. Deste modo, podemos fazer pleno uso do teorema que demonstramos na seção anterior para as funções dadas.

a) Para a função $\operatorname{arcsen} = as$, partindo da identidade $s(as(t)) = t$, onde $s = \operatorname{sen} : [-\pi/2; \pi/2] \to [-1; 1]$ e aplicando a propriedade de derivada de função composta, conforme feito no teorema, temos

$$s'(as(t)) \cdot as'(t) = 1 \Rightarrow as'(t) = \frac{1}{c(as(t))},$$

onde $c = \cos$, no mesmo domínio de $s$. Não sabemos lidar diretamente com as funções trigonométricas, mas conhecemos uma relação que, talvez, possa ajudar em algo neste sentido. Bem sabemos que, para qualquer número real $r$, é satisfeita a relação

$$\cos^2 r + \operatorname{sen}^2 r = 1.$$

Deste modo, temos, para $r = as(t)$,

$$c^2(as(t)) + s^2(as(t)) = 1 \Leftrightarrow (c(as(t)))^2 + (s(as(t)))^2 = 1.$$

Usando a identidade entre uma função e sua inversa, temos, na realidade, para este caso,

$$(c(as(t)))^2 + t^2 = 1.$$

Assim, obtemos

$$(c(as(t)))^2 = 1 - t^2 \Rightarrow c(as(t)) = \sqrt{1 - t^2},$$

fato que nos conduz, com sua devida substituição e adequação, a

$$as'(t) = \frac{1}{c(as(t))} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

b) Procedendo de maneira semelhante para a função arccos $= \mathrm{ac}$, teremos, com o uso do mesmo argumento,

$$c'\left(\mathrm{ac}\left(t\right)\right)\cdot \mathrm{ac}'\left(t\right)=1\Rightarrow \mathrm{ac}'\left(t\right)=\frac{1}{-s\left(\mathrm{ac}\left(t\right)\right)},$$

onde $s$ é a definição da função seno sob o mesmo domínio de $c$. De modo semelhante, adaptamos a identidade trigonométrica essencial para este caso, de modo a obter

$$\left(c\left(\mathrm{ac}\left(t\right)\right)\right)^{2}+\left(s\left(\mathrm{ac}\left(t\right)\right)\right)^{2}=1\Rightarrow t^{2}+\left(s\left(\mathrm{ac}\left(t\right)\right)\right)^{2}=1.$$

Perceba, antecipadamente, que parece ser apenas uma diferença de sinal em relação a $\mathrm{as}'$. Vamos continuar o cálculo para você perceber isto melhor.

$$t^{2}+\left(s\left(\mathrm{ac}\left(t\right)\right)\right)^{2}=1\Leftrightarrow\left(s\left(\mathrm{ac}\left(t\right)\right)\right)^{2}=1-t^{2}\Rightarrow s\left(\mathrm{ac}\left(t\right)\right)=\sqrt{1-t^{2}}.$$

É possível a extração de raiz deste modo devido à restrição feita sobre $s$ (qual seja, $[0;\pi]$). Isto nos conduz, imediatamente, a

$$\mathrm{ac}'\left(t\right)=\frac{1}{-s\left(\mathrm{ac}\left(t\right)\right)}=\frac{1}{-\sqrt{1-t^{2}}}=\frac{-1}{\sqrt{1-t^{2}}}\ !$$

*Realmente, a diferença entre as derivadas de* $\mathrm{as}$ *e de* $\mathrm{ac}$ *se limitam às suas imagens por um sinal!* Veremos qual é o efeito disto quando estudarmos integração.

c) Por fim, para a função $\mathrm{at}$, faremos pleno uso do já discutido até o presente momento. Partindo, novamente, da identidade entre a função e sua inversa, escrevemos

$$f'\left(\operatorname{arctg} t\right)\cdot \operatorname{arctg}' t=1\Rightarrow \operatorname{arctg}' t=\frac{1}{\sec^{2}\left(\operatorname{arctg} t\right)}.$$

Inicialmente, paramos neste ponto e nos perguntamos: "o que raios dá isto?". Não nos conduzindo ao desespero, recordemo-nos de que

$$\sec^{2} r=1+\operatorname{tg}^{2} r,$$

para qualquer valor real $r$ de modo que $\cos r\neq 0$. Assim, temos

$$\mathrm{at}'\left(t\right)=\frac{1}{\sec^{2}\left(\operatorname{arctg} t\right)}=\frac{1}{\left(1+\left(\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} t\right)\right)^{2}\right)}=\frac{1}{1+t^{2}}.$$

---

Perceba, na análise feita, o uso constante de propriedades já conhecidas e em maior profundidade. As demonstrações apresentadas não "tiram coisas da manga", mas são baseadas em observações bem concisas.

Em tudo o que você pretender fazer, tome extremo cuidado com sua escrita, por ser ela o determinante para a obtenção para um bom resultado e para uma boa compreensão dos assuntos que você aborda ou procura aprender.

Agora, sim, podemos apresentar, coerentemente, a dita *tábua de derivação*.

## 4.7 Resumo (compilação)

De acordo com o que vimos na seção, podemos sumarizar todas as informações mínimas na seguinte tabela:

**Derivadas das Funções Elementares**

| **Função ($f(t) = \ldots$)** | **Domínio** | **Derivada** |
|---|---|---|
| $t$ | $\mathbb{R}$ | $1$ |
| $t^r$ | $\mathbb{R}$ | $r \cdot t^{r-1}$ |
| $\operatorname{sen} t$ | $\mathbb{R}$ | $\cos t$ |
| $\cos t$ | $\mathbb{R}$ | $-\operatorname{sen} t$ |
| $\operatorname{arcsen} t$ | $(-1;1)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ |
| $\arccos t$ | $(-1;1)$ | $\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$ |
| $\operatorname{arctg} t$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{1+t^2}$ |
| $e^t$ | $\mathbb{R}$ | $e^t$ |
| $r^t$ | $\mathbb{R}, r > 0$ | $r^t \cdot \ln r$ |
| $\ln t$ | $\mathbb{R}_+ = (0;+\infty)$ | $\frac{1}{t}$ |
| $\log_r t$ | $\mathbb{R}_+ = (0;+\infty), r > 0, r \neq 1$ | $\frac{1}{t \cdot \ln r}$ |

**Propriedades Operatórias (Regras de Derivação)**

| |
|---|
| $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ |
| $(f+g)' = f' + g'$ |
| $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ |
| $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g + f \cdot g'}{g^2}$ |
| $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ |

# 5 Extensão às funções compostas: derivadas de funções dadas implicitamente

Rotineiramente, trabalhamos muito com funções bem definidas e bem expressas, como, por exemplo,

$$f(x) = x^6 \operatorname{sen}(x+\pi) - e^{-12x} + 1.$$

Claro que exagerei neste exemplo, mas o importante é: usualmente, trabalhamos com funções expressas variável dependente de variável. No exemplo, temos $f = f(x)$ de maneira bem evidente. Todavia, existem muitos casos nos quais não conseguimos escrever uma sentença como à do exemplo citado. Um destes casos, de modo bem simples, pode ser resumido na equação

$$\frac{x^2}{6} - \frac{3y^2}{19} = 1.$$

Esta equação, como bem sabemos, representa graficamente uma elipse. Neste caso, ainda é possível resolver o problema de expressar uma variável dependendo de outra. Analisemos a equação a seguir.

$$\frac{e^t}{x^2} - 12x \operatorname{sen}(\pi - t) = e^{-3t+x+\pi}.$$

Note que é claramente impossível escrever $x$ dependendo de $t$ e vice-versa. Em muitos destes casos, estamos fazendo análises sobre a situação considerando a possibilidade de a expressão dada representar propriamente uma função. Quando uma expressão destas ocorre, dizemos que ***a função é dada implicitamente*** *pela expressão.*

E quanto a tal situação, é possível proceder a uma análise utilizando a derivada? Sim, é possível, e, para isto, admitimos que a expressão pode definir uma função em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ para podermos proceder a tal análise.

Consideremos ser possível escrever toda e qualquer expressão envolvendo duas variáveis na forma

$$\omega(x; t) = 0.$$

Se, adicionado a isto, pudermos considerar, para um intervalo aberto, que $x$ representa uma função de $t$ (ou vice-versa), teremos $x = (t)$ definida implicitamente pela expressão anterior. Através da derivada de função composta ("regra da cadeia"), podemos determinar uma expressão para a derivada de $x$, que envolverá as variáveis $x$ e $t$. Vejamos alguns exemplos.

- Se consideramos $y = y(x)$ para a expressão

  $$\frac{x^3 - 12}{17} + xy = y^2 - 10$$

  e procuramos avaliar como a derivada de $y$ se comporta onde esta expressão puder ser formalmente definida, teremos, devido ao fato de não ser possível expressar $y$ de modo direto como função de $x$,

  $$\left(\frac{x^3 - 12}{17}\right)' + (x \cdot y(x))' = \left((y(x))^2\right)' - (10)' \Rightarrow \frac{1}{17}\left(3x^2\right) + (y(x) + x \cdot y'(x)) = 2y(x) \cdot y'(x).$$

  Perceba que, para derivar $y^2$, fizemos uso da derivada de função composta, pois não conhecemos a forma de $y$ em relação a $x$. Reorganizando melhor a expressão evidenciando $y'$, temos

  $$y'(x)(x - 2y(x)) + \frac{3x^2}{17} + y(x) = 0 \Leftrightarrow y'(x) = \frac{-1}{17} \cdot \frac{3x^2 + 17y(x)}{x - 2y(x)}.$$

- Fazendo $x = x(t)$ para a expressão

  $$xt - 1 = \operatorname{sen} t \cos x,$$

observemos como a derivada de $x$ se comporta onde esta expressão representar, propriamente, uma função. Promovendo o uso do já abordado anteriormente, temos, com as considerações feitas,

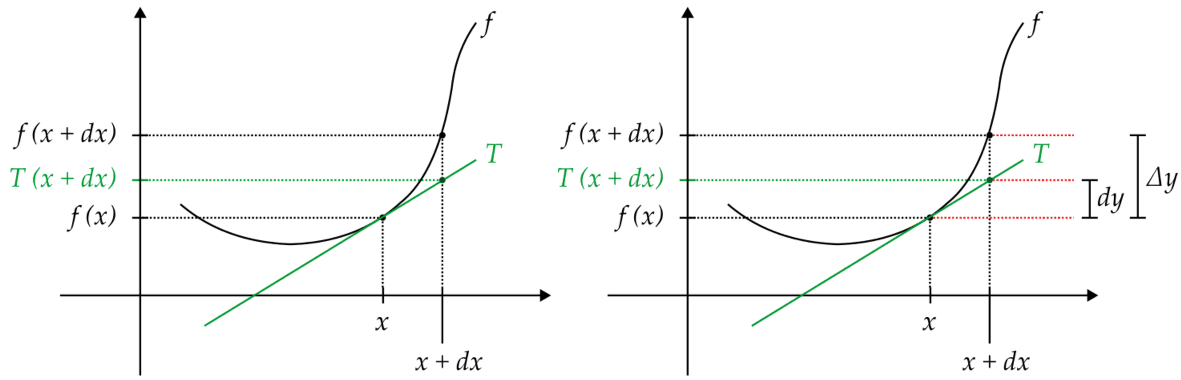
$$tx'(t) + x(t) = \cos t \cos(x(t)) - \operatorname{sen} t\,(\operatorname{sen}(x(t)) \cdot x'(t)).$$

Reorganizando de modo a evidenciar $x'$, temos

$$x'(x - \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{sen} x) = \cos t \cdot \cos x - x \Leftrightarrow x' = \frac{\cos t \cdot \cos x - x}{x - \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{sen} x}.$$

# 6 Diferencial e notação de Leibniz

Avaliaremos agora de onde vem uma das terminologias mais usadas para a derivada. Conforme discutimos no início do capítulo, o valor $f'(x)$ representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $x$, ou melhor, $(x; f(x))$. Avaliando o efeito de um pequeno acréscimo sobre $x$ em $f$, observe o acréscimo causado em $f$ e na reta tangente mencionada:




Apesar da terminologia da figura não corresponder muito à realidade (onde se diz $y$ deveria ter-se dito $f$), note que, quanto mais próximo de zero estiver $dx$, mais próximo de $f(x)$ estará $T(x)$, ou seja, $df$ estará mais próximo de $\Delta f$. Esta é outra maneira de mostrar aquilo que vimos no início do capítulo a respeito da aferição média.

Em termos analíticos, procedemos a um acréscimo $\Delta x$ sobre um ponto $x$ marcado no domínio de $f$ e este acréscimo se confunde com a avaliação linear do próprio acréscimo, qual seja, $dx$. O efeito sobre $f$ é o discutido no parágrafo anterior. Recordemo-nos de que a equação de $T$ é, especificamente,

$$T(p) = f(x) + f'(x)(p - x).$$

Assim, fazendo $p - x = \Delta x = dx$, teremos, para a mesma equação,

$$T(x + dx) = f(x) + f'(x) \cdot dx.$$

Reescrevendo a equação anterior de modo a avaliar expressamente o que acontece com o termo $dx$, temos

$$T(x + dx) - f(x) = f'(x) \cdot dx.$$

Perceba que o membro anterior (lado esquerdo) da equação, em concordância com as figuras apresentadas, corresponde à avaliação de $df$. Deste modo, temos

$$df = f'(x) \cdot dx,$$

de onde concluímos que

$$\frac{df}{dx} = f'(x).$$

Portanto, a terminologia que dizemos ser a *notação de Leibniz* provém, em parte, desta análise de acréscimos. Na realidade, ela provém mesmo da terminologia de *operadores* oriunda da Álgebra Linear e é expressa por

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(f\right).$$

Às vezes, é mais fácil de tratarmos de argumentos genéricos (sobretudo ordens de derivação) por esta escrita ao invés de usarmos a terminologia clássica. Deste modo, temos

- $\dfrac{d^2f}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}\left(f\right)\right)$, para derivadas de ordem 2,
- $\dfrac{d^3f}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2f}{dx^2}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}\left(f\right)\right)\right)$, para derivadas de ordem 3,
- $\dfrac{d^4f}{dx^4} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^3f}{dx^3}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}\left(f\right)\right)\right)\right)$, para derivadas de ordem 4,
- e assim por diante, até a representação para um número natural $n$, $\dfrac{d^nf}{dx^n}$.

Depois de toda esta discussão, estamos razoavelmente prontos para tratar de alguns exercícios. Lembre-se de, quando possível, detalhar bem sua resolução para evitar possíveis dúvidas de abordagem ou de correção.